Chứng minh:

dk(i, j) là chiều dài đường đi ngắn nhất trong những đường nối đỉnh i đến đỉnh j qua các đỉnh trung giang j1, j2, …, k

mệnh đề luôn đúng với k = 0

giả sử mệnh đề đúng với k-1

xét dk(i, j)

có 2 trường hợp

TH1: trong các đường nối đỉnh i với j qua các đỉnh trung gian j1, j2, …, jk-1 có chiều dài ngắn nhất tồn tại một đường p không qua đỉnh k

Khi đó p là chiều dài ngắn nhất nối đỉnh i với j qua các đỉnh trung gian j1, j2, …, jk-1 nên theo giả thiết quy nạp:

dk-1(i, j) = d(p) ≤ dk-1(i, k) + dk-1(k,j)

do đó:

dk(i, j) = dk-1(i, j) = d(p) là độ dài đường đi ngắn nhất từ i đến j qua các đỉnh trung gian j1, j2, …, jk-1

TH2: mọi đường nối đỉnh i với j qua các đỉnh trung gian j1, j2, …, jk-1, jk có chiều dài ngắn nhất đều qua đỉnh k

Gọi p = (i,...k,…j) là một đường ngắn nhất nối đỉnh i với j qua các đỉnh trung gian j1, j2, …, jk-1, jk

Khi đó đoạn (i,…k) và (k,…j) cũng là các đường đi ngắn nhất qua các đỉnh j1, j2, …, jk-1. Ta có:

dk-1(i, k) + dk-1(k,j) = d(p) = dk-1(i,j)

do đó dk(i,j) = dk-1(i,k) + dk-1(k, j) = d(p) là độ dài đường đi ngắn nhất từ i đến j qua các đỉnh trung gian j1, j2, …, jk-1, jk